

## Devoir 6

Louis-Olivier Brassard  
PHI1005 – Logique 1

Automne 2019

### Question 1.

En utilisant la méthode de la déduction naturelle, démontrez les raisonnements suivants :

a)  $p \supset q, r \supset s, \neg(q \vee s) \vdash \neg(p \vee r)$

1		$p \supset q$	H
2		$r \supset s$	H
3		$\neg(q \vee s)$	H
4		— $p \vee r$	H
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			

b)  $\vdash \neg(\neg p \vee \neg q) \supset (q \wedge q)$

1	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	H
2	$\neg p$	H
3	$\neg p$	R (2)
4	$\neg p \vee \neg q$	$\vee$ I (3)
5	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	R (1)
6	$\neg\neg p$	$\neg$ I (2, 4, 5)
7	$p$	$\neg$ E (5)
8	$\neg q$	H
9	$\neg q$	R (8)
10	$\neg q \vee \neg p$	$\vee$ I (9)
11	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	R (1)
12	$\neg\neg q$	$\neg$ I (8, 10, 11)
13	$q$	$\neg$ E (12)
14	$p \wedge q$	$\wedge$ I (7, 13)
15	$\neg(\neg p \vee \neg q) \supset (p \wedge q)$	$\supset$ I (1-14)

c)  $(p \wedge r), \neg r \vdash p$

1	$p \vee r$	H
2	$\neg r$	H
3	$\neg p$	H
4	$\neg p$	R (3)
5	$p \vee r$	R (1)
6	$r$	EFQ (5)
7	$\neg\neg p$	$\neg$ I (3, 5, 6)
8	$p$	$\neg$ I (7)

d)  $\vdash (p \vee (q \supset r)) \equiv ((p \vee q) \supset (p \vee r))$

J'ai passé six heures à chercher la solution.

J'ai vérifié avec un solutionnaire automatique en ligne (<http://teachinglogic.liglab.fr/DN/index.php>).

La preuve générée est très très très longue (56 lignes); je l'ai lue et n'y serais pas arrivé moi-même.

Voici mon intuition initiale (mais je bloque à chaque fois) :

1	$p \vee (p \supset r)$	H
2	$\neg((p \vee q) \supset (p \vee r))$	H
3	$p$	H
4	$p \vee q$	H
5	$p \vee r$	R (4)
6	$p$	R (3)
7	$p \vee r$	$\vee$ I (6)
8	$(p \vee q) \supset (p \vee r)$	$\supset$ I (4, 7)
9	$p \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$	$\supset$ I (3, 7)
10	...	
11	$(p \vee q) \supset (p \vee r)$	$\supset$ I (3, 8)
12	$\neg\neg((p \vee q) \supset (p \vee r))$	$\neg$ I
13	$(p \vee q) \supset (p \vee r)$	$\neg$ E
14	$(p \vee (q \supset r)) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$	$\supset$ I (PREMIÈRE IMPLICATION)
15	$(p \vee q) \supset (p \vee r)$	H
16	$p$	H
17	$p$	R
18	$p \vee (q \supset r)$	$\vee$ I
19	...	
20	$p \vee (q \supset r)$	
21	$((p \vee q) \supset (p \vee r)) \supset (p \vee (q \supset r))$	$\supset$ I (DEUXIÈME IMPLICATION)
22	$(p \vee (q \supset r)) \equiv ((p \vee q) \supset (p \vee r))$	$\equiv$ I (RÉSULTAT DES DEUX IMPLICATIONS)