

# Devoir 7

Louis-Olivier Brassard  
PHI1005 – Logique 1

Automne 2019

## Question 1.

En utilisant la méthode de la déduction naturelle, démontrez les raisonnements suivants :

a)  $\vdash (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$

1		$p \supset q$	H		
2			$\neg q$	H	
3				$p$	H
4				$p$	R (3)
5				$p \supset q$	R (1)
6				$q$	$\supset$ E (4, 5)
7				$\neg q$	R (2)
8				$\neg p$	$\neg$ I (3, 6, 7)
9			$\neg q \supset \neg p$	$\supset$ I (2, 8)	
10		$(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$	$\supset$ I (1, 9)		

b)  $\neg(p \supset q) \wedge \neg p \vdash \neg q$

1		$\neg(p \supset q) \wedge \neg p$	H		
2			$q$	H	
3			$\neg(p \supset q) \wedge \neg p$	R (1)	
4			$\neg(p \supset q)$	$\wedge$ E (3)	
5				$p$	H
6				$q$	R (2)
7			$p \supset q$	$\supset$ I (5, 6)	
8			$\neg q$	$\neg$ I (2, 4, 7)	

c)  $\vdash (\neg p \vee q) \supset (p \supset q)$

1	$\neg p \vee q$	H
2	$p$	H
3	$\neg q$	H
4	$p$	R (2)
5	$\neg q$	R (3)
6	$p \wedge \neg q$	$\wedge$ I (4, 5)
7	$\neg p \vee q$	R (1)
8	$\neg\neg q$	$\neg$ I (3, 4, 5, 6, 7)
9	$q$	$\neg$ E (8)
10	$p \supset q$	$\supset$ I (2, 9)
11	$(\neg p \vee q) \supset (p \supset q)$	$\supset$ I (1, 10)

d)  $\neg p \supset \neg q, \neg q \supset \neg r, \neg p \supset \neg s, \neg r \supset s \vdash r \supset p$

1	$\neg p \supset \neg q$	H
2	$\neg q \supset \neg r$	H
3	$\neg p \supset \neg s$	H
4	$\neg r \supset s$	H
5	$r$	H
6	$\neg p$	H
7	$\neg p$	R (6)
8	$\neg p \supset \neg q$	R (1)
9	$\neg q$	$\supset$ E (7, 8)
10	$\neg q \supset \neg r$	R (2)
11	$\neg r$	$\supset$ E (9, 10)
12	$r$	R (5)
13	$\neg\neg p$	$\neg$ I (6, 11, 12)
14	$p$	$\neg$ E (13)
15	$r \supset p$	$\supset$ I (5, 14)

e)  $\vdash \neg p \supset (\neg q \supset \neg(p \vee q))$

1	$\neg p$	H
2	$\neg q$	H
3	$p \vee q$	H
4	$\neg p$	R (1)
5	$\neg q$	R (2)
6	$\neg p \wedge \neg q$	$\wedge$ I (4, 5)
7	$p \vee q$	R (3)
8	$\neg(p \vee q)$	$\neg$ I (3, 6, 7)
9	$\neg q \supset \neg(p \vee q)$	$\supset$ I (2, 8)
10	$\neg p \supset (\neg q \supset \neg(p \vee q))$	$\supset$ I (1, 9)